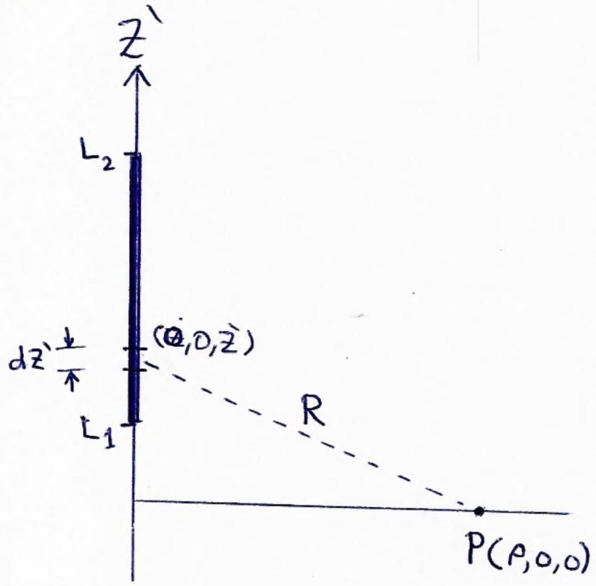
Tripoli university
Faculty of engineering
EE department
EE313 - Solutions of section 5-5

Problem # 5-14

$$\vec{A} = \int_{\ell} \frac{\mu_0 I \, d\vec{l}'}{4\pi R}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z')^2}$$



$$\vec{A} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{\mu_0 I \, dz' \, \vec{a_z}}{4\pi \sqrt{\rho^2 + (z')^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{a_z} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}}$$

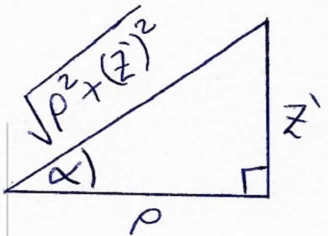
Let $z' = \rho \tan\alpha \Rightarrow dz' = \rho \sec^2\alpha \, d\alpha$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{a_z} \left[\int \frac{\rho \sec^2\alpha}{\rho \sec\alpha} d\alpha \right]$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{a}_z\left[\ln(\sec\alpha + \tan\alpha)\right]$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{\rho^2+(z')^2}}{\rho}$$

$$\tan\alpha = \frac{z'}{\rho}$$

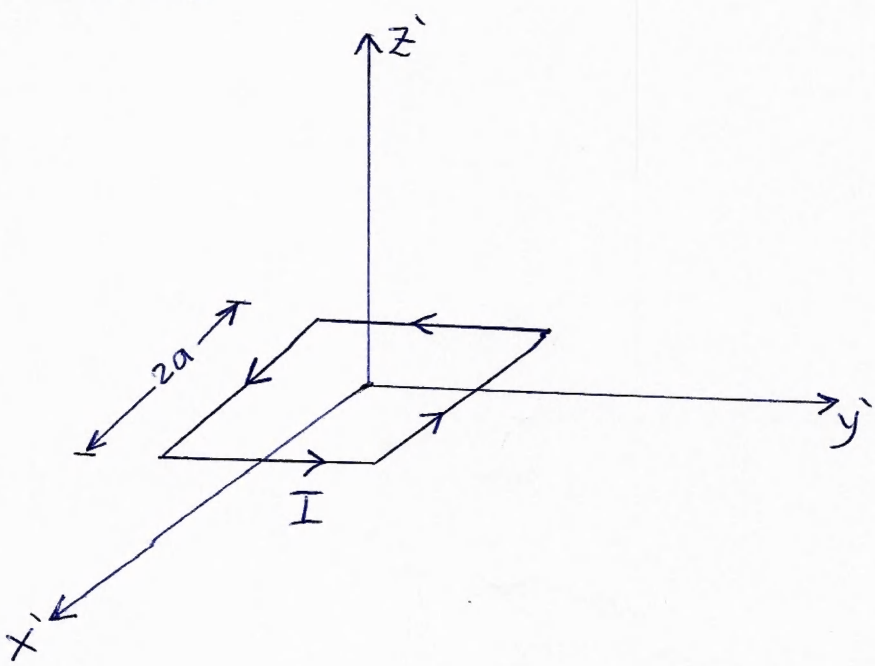


$$\therefore \vec{A} = \vec{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{\rho^2+(z')^2}+z'}{\rho}\right)\right]_{L_1}^{L_2}$$

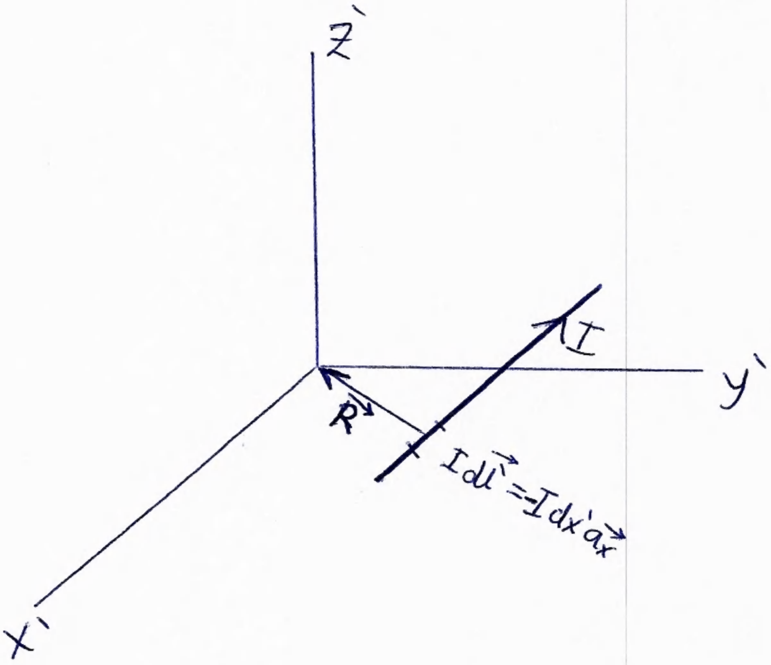
$$= \vec{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{\rho^2+L_2^2}+L_2}{\rho}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{\rho^2+L_1^2}+L_1}{\rho}\right)\right]$$

$$= \vec{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{\rho^2+L_2^2}+L_2}{\sqrt{\rho^2+L_1^2}+L_1}\right)$$

Problem# 5-16



من الشكل وحيث أن نقطه الأصل تبعد نفس المسافة من الأضلاع الأربعة للمربع ومن قاعدة اليد اليمنى نجد أن التيارات الأربع كل منها سيولد نفس المجال عند النقطة (0,0,0) وعلى ذلك نكتفي بحساب التكامل لضلع واحد ونضرب الناتج في 4 .



$$\vec{R} = -a\vec{a_y} - x'\vec{a_x}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(x')^2 + a^2}$$

$$\vec{a_R} = \frac{-x'\vec{a_x} - a\vec{a_y}}{\sqrt{(x')^2 + a^2}}$$

$$I\vec{dl} = -I\,dx'\vec{a_x}$$

$$\vec{B}(0,0,0) = \int_{-a}^{a} \frac{-\mu_0 I\,dx'\vec{a_x} \times (-x'\vec{a_x} - a\vec{a_y})}{4\pi\left((x')^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

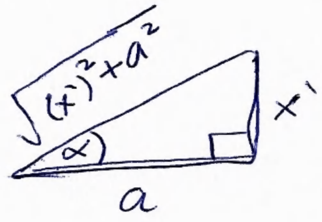
$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\vec{a_z}\int_{-a}^{a} \frac{dx'}{\left((x')^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

let $x' = a\tan\alpha \Rightarrow dx' = a\sec^2\alpha\, d\alpha$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\vec{a_z}\left[\int \frac{a\sec^2\alpha}{a^3\sec^3\alpha}\, d\alpha\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\vec{a_z}\left[\frac{1}{a^2}\sin\alpha\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{a_z}\left[\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+a^2}}\right]_{-a}^{a}$$



$$= \vec{a_z}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}\right]$$

$$= \vec{a_z}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \vec{a_z}\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\,\pi a}$$

وبضرب الناتج في 4 :-

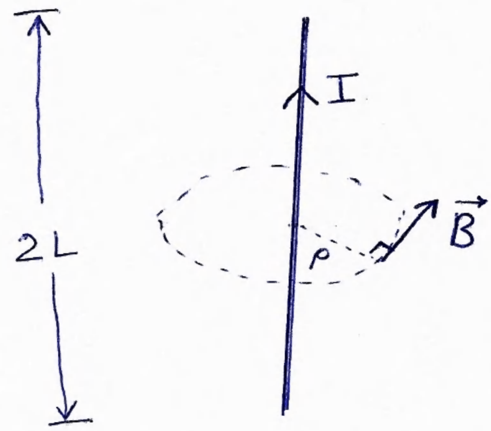
$$\vec{B} = \vec{a_z}\frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}$$

Problem # 5-17

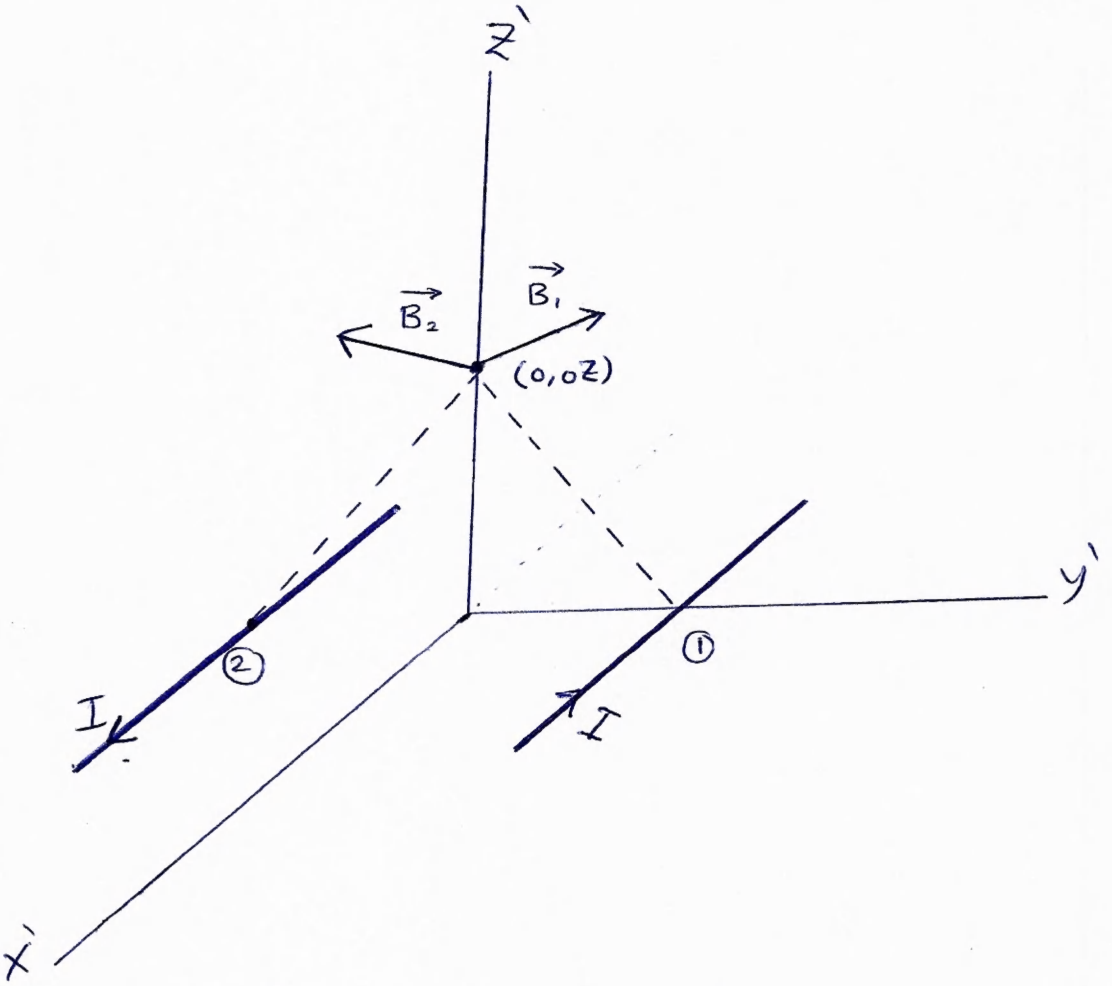
لحل هذه المسألة سنستخدم نتيجة المثال (5-4) .

$$\vec{B} = \vec{a_\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\frac{L}{\sqrt{L^2+\rho^2}}$$

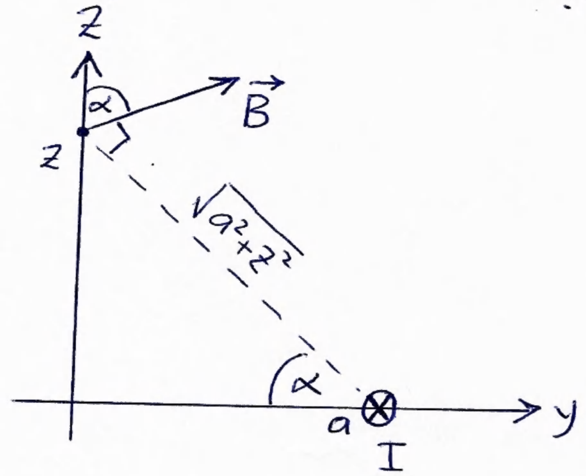
وحيث أن اتجاه $\vec{a_\phi}$ عند أي نقطة فإنه متعامد مع نصف القطر .



الآن لنأخذ ضلعين متقابلين :-



من التماثل نجد أن المجال المغناطيسي لأي ضلعين متقابلين يلغي بعضه في اتجاهات x و y ويجمع في اتجاه z فقط.
إذاً نقوم بحساب المركبة z للمجال المغناطيسي لضلع واحد ثم نضربه في 4.



$$B_z = B\cos\alpha$$

ومن المثلث فإن $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$

إذاً بمقارنة هذا الضلع بالمثال (4-5) فإن $L=a$ و $\rho=\sqrt{a^2+z^2}$

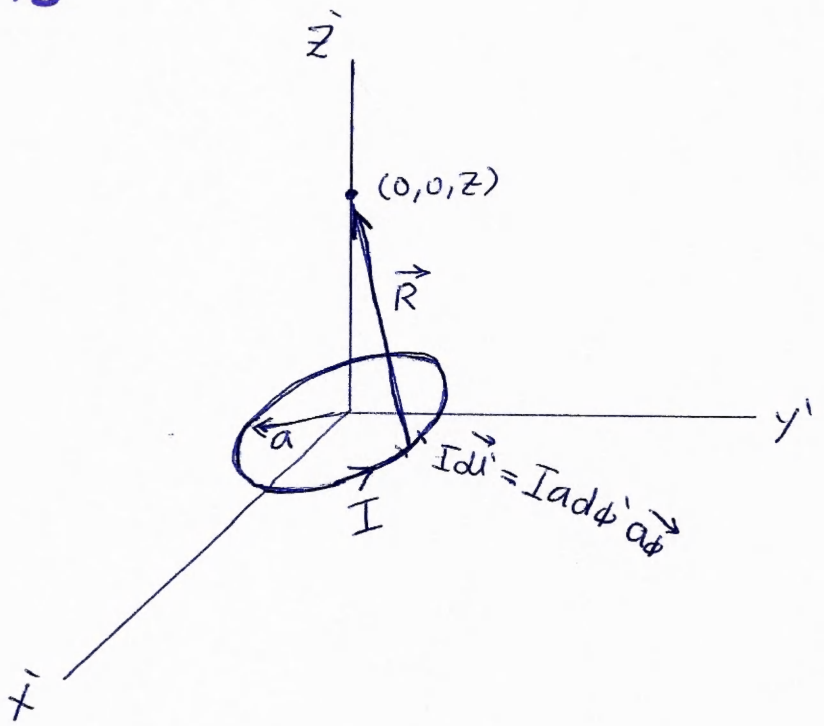
$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2+z^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}$$

وبضرب الناتج في 4 :-

$$B_z = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}$$

Problem 5-18



$$\vec{R} = -a\vec{a_\rho} + z\vec{a_z}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{a^2+z^2}$$

$$\vec{a_R} = \frac{-a\vec{a_\rho} + z\vec{a_z}}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I a\, d\phi' \vec{a_\phi} \times (-a\vec{a_\rho} + z\vec{a_z})}{4\pi (a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (a\vec{a_z} + z\vec{a_\rho})\, d\phi'$$

ولكن من التماثل لن يكون لـ $\vec{B}$ مركبة في اتجاه $\vec{a_\rho}$ (يمكنك اثبات ذلك رياضياً من التكامل وبملاحظة أن $\vec{a_\rho}$ دالة في ϕ' ولا يمكن اخراجه من التكامل بل يجب التعويض عنه في الاحداثيات الكارتيزية ($\vec{a_\rho} = \vec{a_x}\cos\phi' \pm \vec{a_y}\sin\phi'$) ومن السهل اثبات ان التكامل سيساوي صفر).

$$\therefore \vec{B} = \vec{a_z} \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi (a^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi'$$

$$= \vec{a_z} \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2+z^2)^{3/2}}$$

م/عبدالله عياد أبوقرين
خريف 2012